

Álgebra III

Examen X

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra III

Examen X

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2026/27.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Primer examen sorpresa.

Fecha 16 de Octubre de 2025.

Duración Una hora.

Ejercicio 1. Sea $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Calcular:

1. $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$.
2. $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.
3. $\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.

Ejercicio 1. Sea $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Calcular:

1. $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$.

Veamos en primer lugar que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$. Por un lado:

$$\begin{aligned}\alpha - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2} &\implies \alpha^3 - 3\alpha^2\sqrt{3} + 9\alpha - 3\sqrt{3} = 2 \\ &\implies \frac{\alpha^3 + 9\alpha - 2}{3(\alpha + 1)} = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)\end{aligned}$$

Por otro lado, $\sqrt[3]{2} = \alpha - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, luego $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$. Buscamos un polinomio mónico en $\mathbb{Q}[x]$ del que α sea raíz. Para ello, elevamos al cuadrado la expresión de $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^6 + 2\alpha^3(9\alpha - 2) + 81\alpha^2 + 4 - 36\alpha}{9(\alpha^2 + 2\alpha + 1)} &= 3 \\ \alpha^6 + 18\alpha^4 - 4\alpha^3 + 81\alpha^2 - 36\alpha + 4 &= 27(\alpha^2 + 2\alpha + 1) \\ \alpha^6 + 18\alpha^4 - 4\alpha^3 + 54\alpha^2 - 90\alpha - 23 &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, α es raíz de $f = x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 54x^2 - 90x - 23 \in \mathbb{Q}[x]$. No obstante, no es fácil ver si es irreducible o no. Para ello, consideramos las siguientes torres:

- $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$

Por el Lema de la Torre, tenemos que:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$$

- $\text{Irr}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^2 - 3$, que es irreducible por Eisenstein para $p = 3$, luego $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$.
- Dado $g = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$, tenemos que $g(\sqrt[3]{2}) = 0$, luego $\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ divide a g , con lo que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \leq 3$. Notemos que no es fácil ver si es irreducible o no, por lo que a priori no podemos afirmar si es 1, 2 o 3.
- $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$

Por el Lema de la Torre, tenemos que:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$$

- $\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$, que es irreducible por Eisenstein para $p = 2$, luego $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.
- Dado $h = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[x]$, tenemos que $h(\sqrt{3}) = 0$, luego $\text{Irr}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ divide a h , con lo que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \leq 2$. Notemos que no es fácil ver si es irreducible o no, por lo que a priori no podemos afirmar si es 1 o 2.

Por tanto, tenemos que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ es múltiplo de 2 y de 3, y menor o igual que 6. Por tanto, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 6$, y $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ es de grado 6. Por tanto:

$$\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 54x^2 - 90x - 23 \in \mathbb{Q}[x]$$

2. $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.

Buscamos en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ un polinomio mónico del que α sea raíz. De la expresión de $\sqrt{3}$ en función de α obtenemos que:

$$\alpha^3 + 9\alpha - 2 = 3(\alpha + 1)\sqrt{3} \implies \alpha^3 + (9 - 3\sqrt{3})\alpha - 2 - 3\sqrt{3} = 0$$

No obstante, no es fácil ver si es irreducible o no. Por la primera torre descrita, tenemos que:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]} = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, tenemos que el grado de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\alpha))$ es 3, y como se tiene que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\alpha)$, tenemos que:

$$\deg(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))) = 3$$

Por tanto, se deduce que:

$$\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{3})) = x^3 + (9 - 3\sqrt{3})x - 2 - 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$$

3. $\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.

Buscamos en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ un polinomio mónico del que $\sqrt[3]{2}$ sea raíz. Consideramos:

$$x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$$

No obstante, no es fácil ver si es irreducible o no. Por la primera torre descrita, tenemos que:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]} = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, tenemos que el grado de $\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ es $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 3$, y como se tiene que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$, tenemos que:

$$\deg(\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))) = 3$$

Por tanto, se deduce que:

$$\text{Irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$$